

論平凡性結果與必輸賭注契約論證

摘要

本文試圖論證兩個論點：一、平凡性結果不應該被視為一個條件句理論需要處理的問題；二、支持古典機率理論的「必輸賭注契約論證」有丐題之嫌。自路易士提出平凡性結果以來 (Lewis, 1976, 1986)，大多數學者認為平凡性結果所帶給我們的教訓是：我們不能把條件句視為具有真假值的命題 (Edgington, 1986, 1995, 2006; Bennett, 2003)。本文試圖論證平凡性結果所帶來的真正教訓是：我們應該重新反省古典機率理論。自此銜接第二個論點，因為支持古典機率理論的常見論證就是「必輸賭注契約論證」(Skyrms, 1986; Hacking, 2001)，而本文試圖指出必輸賭注契約論證有丐題之嫌，所以古典機率理論並不如大家所認為的那樣可信。

關鍵字：平凡性結果、必輸賭注契約論證、機率理論、條件句

On the Triviality Results and the Dutch Book Argument

ABSTRACT

Two theses will be argued in this paper: first, Lewis's triviality results should not be a problem for a theory of conditionals; second, the Dutch Book argument, used to stand for the received probability theory, seems to beg the question. Since Lewis presented the triviality results in 1976, most of philosophers or logicians believe that if we want to evade the triviality results we should take conditionals as no truth-value. By generalizing Lewis's triviality results, it is argued that the triviality results have nothing to do with conditionals. Therefore, to avoid the triviality results, I propose, we should reconsider the received probability theory. On the other hand, the Dutch Book argument is often used to argue for the thesis that rationality requires us to obey the received probability theory. If so, it seems that there is no reason to doubt the received probability theory. By examining the Dutch Book argument in detail, it is argued that the Dutch Book argument begs the question. Therefore, the received probability theory is not as well-grounded as many believe.

KEYWORDS: triviality results, the Dutch Book argument, probability theory, conditionals

題目：論平凡性結果與必輸賭注契約論證

壹、問題背景說明

在許多邏輯教科書裡，「若...，則...」(if..., then...) 這個連接詞被當作是一個真值函數，而學者通常稱這樣的理論為「古典邏輯」(Gamut, 1991; Priest, 2001; Causey, 2006)。亞當斯 (Adams) 在一九六五年的文章裡，不僅指出古典邏輯的缺失，更針對條件句提出自己的嶄新語意論，亦即機率語意論。亞當斯主張我們應該放棄將條件句當作是有真假值的命題，而應該用相信程度 (degrees of belief) 或可信度 (credence) 來評斷條件句。結合古典機率理論，亞當斯提議將條件句的可信度視為條件機率 (1965, 1975)。

另一方面，除了亞當斯之外，史東內克 (Stalnaker) 也不滿意古典邏輯對條件句的解釋，他提議將「若...，則...」視為一個非真值函數，亦即使用可能世界之間的關係來評斷條件句的真假值 (1968)。¹受到亞當斯的影響，史東內克在一九七〇年的文章裡，主張機率語意論與自己的條件句理論有共通之處，並提出一個相似的論點，亦即條件句的為真機率等於條件機率。在此要注意的是，史東內克的看法在兩個方面不同於亞當斯：一、亞當斯反對條件句有真假值，但是史東內克對條件句仍採取一種真值條件式的立場；二、亞當斯的機率語意論不允許條件句的前件或後件本身是條件句，但是史東內克的理論沒有這樣的限制。這樣的結果可能是許多學者所樂見的，因為這樣一來，我們就可以放心的採取真值條件式的語意論來處理條件句，但是路易士 (Lewis) 在一九七六年的文章裡，證明了史東內克對條件句機率的看法是有問題的。

透過古典機率理論與史東內克對條件句機率的看法，路易士推導出一個荒謬的結果，亦即條件機率會等價於非條件機率。如果想避開這個荒謬的結果，我們必須讓自然語言成為一個瑣碎的語言；不過我們的自然語言很明顯不是瑣碎的，所以出問題的地方一定是古典機率理論或是史東內克對條件句機率的看法。此後，這個問題被學者稱為「平凡性結果」(triviality results) 的問題。基於大多數學者對古典機率理論的支持，反對史東內克對條件句機率的看法成為避開平凡性結果的唯一途徑，而平凡性結果也變成條件句理論需要處理的問題之一。儘管在一九七六年之後，許多學者試圖採取其他方式來避開平凡性結果，不過路易士在一九八六年又提出兩個證明，重申平凡性結果是不可避免的。然而，如果我們遵循亞當斯對條件句的限制，我們就不會有平凡性結果，而這也是為什麼路易士會說史東內克在一九七〇年主張的 (機率語意論與可能世界語意論之間的) 共通性只是一個巧合。

針對平凡性結果，本文將論證，即使我們不使用史東內克對條件句機率的看法，而用一個關於條件機率的論點來取代，加上古典機率理論，我們仍可推導出

¹ 對任何命題 A 與 C，一個條件句「若 A，則 C」在可能世界 w 中為真，若且唯若，C 會在最接近可能世界 w 且 A 在其中也為真的可能世界裡為真。由於本文不討論史東內克的可能世界語意論，故在此省略。

一個類似平凡性結果的荒謬性，亦即自然語言中不存在有一個不瑣碎的連接詞，其值可用條件機率來定義。本文稱之為「普遍化的平凡性結果」。基於此，本文論證路易士的平凡性結果（或任何類似的平凡性結果）不應該被視為一個條件句理論需要處理的問題。因此，避開平凡性結果的另一個可能途徑是去檢視古典機率理論。

針對上述的論點，有些學者會認為古典機率理論仍是無庸置疑的，因為「必輸賭注契約論證」(the Dutch Book argument) 提供了一個最佳理由來論證我們對命題的相信程度必須遵守古典機率理論的定理 (Skyrms, 1986; Hacking, 2001)。² 首先，本文將借用海耶克 (Hájek) 的論證來指出一般常見的必輸賭注契約論證其實是一個無效論證，因為我們可以構作出「必贏賭注契約論證」(the Good Book argument)。根據必贏賭注契約論證，理性會要求我們違反古典機率理論的定理 (2005)。儘管海耶克修改了必輸賭注契約論證，使得他的修改版是個有效論證，不過本文將指出必輸賭注契約論證將會有丐題之嫌 (即使是海耶克修改後的必輸賭注契約論證)。因為在分析「公平的」(fair) 或「對我們有利的」(favorable) 的概念時，我們已經使用了古典機率理論的定理。此外，本文將借用普里斯特 (Priest) 的雙面真理論 (dialetheism) 來提供一個非古典的機率理論 (2006)，並且根據這個非古典機率理論，論證必輸賭注契約論證仍成立。因此，如果必輸賭注契約論證無法提供一個獨立於古典機率理論的理由，古典機率理論似乎不像學者們認為的那樣有良好根基。最後，本文將根據非古典機率理論，證明平凡性結果將不會出現。因此，採取一個非古典的機率理論確實可以是一個避開平凡性結果的合理方式。

貳、平凡性結果及其哲學意涵

本節將先說明亞當斯對古典邏輯的批評，以及他對條件句的看法。接著介紹史東內克對條件句機率的主張，並說明路易士的平凡性結果如何對史東內克產生困難。

首先，為了之後的說明，讓我們引進一個古典邏輯的語言 L 。如同一般的命題邏輯， L 包含命題常元與邏輯常元；前者用大寫英文字母來表示，後者用「 \neg 」與「 \supset 」分別表示以下兩個真值函數，如下：³

$$f_{\neg}(x) = 1-x$$

² 根據哈金 (Hacking)，「the Dutch Book argument」叫做「Dutch」的原因可能是雷姆濟 (Ramsey) 在提出這個論證時 (1926)，當時大學生賭博常用的黑話，跟荷蘭 (Dutch) 一點關係都沒有。所以哈金在他的機率教科書裡偏好使用「必輸賭注契約」(sure-loss contract) 來稱呼「the Dutch Book」。在此，本文採用哈金的語詞來討論該論證 (Hacking, 2001)。

³ 因為「 \neg 」與「 \supset 」是函數上完整 (functionally complete)，故不再引進其他語句連接詞。換句話說，其他語句連接詞 (例如，「而且」與「或」) 可以僅用「 \neg 」與「 \supset 」來定義。另外，下列的函數是用代數語意論的方式表示：「1」代表真；「0」代表假。以「 \neg 」為例，如果輸入的值是 1，輸出的值就會是 0；所以真語句加上否定會成為一個假語句。至於「 $f_{\supset}(x, y) = \max(1-x, y)$ 」的意思是「從輸入的兩個值——亦即「 $1-x$ 」與「 y 」——中，選取最大的值作為輸出的值」。

$$f_{\supset}(x, y) = \max(1-x, y)$$

前者表示自然語言中的否定詞，例如「不...」；後者則是表示「若...，則...」這個二位的語句連接詞。不過，針對「 \supset 」這個真值函數，亞當斯認為有些條件句無法用該函數來說明，例如：⁴

- (1)若太陽消失，則地球不會陷入黑暗 (Jackson, 1979/1991)。
 (2)若台北在日本，則 $1+1=2$ (Priest, 2001)。

直覺上，(1)與(2)都是假的，但是根據古典邏輯，(1)與(2)都會被判定為真，因為「太陽消失」的值是0，而「 $1+1=2$ 」的值為1。所以，將自然語言中的「若...，則...」當作是「 \supset 」這個真值函數似乎是個壞主意。

針對這樣的問題，亞當斯提議用條件機率的方式來理解條件句的可信度。如下：(其中 **b** 代表一個從命題到 0 與 1 區間實數的可信度函數，**p** 代表古典機率理論的機率函數)

$$(A) \text{對任何非條件句的命題 } \phi \text{ 與 } \varphi, \mathbf{b}(\text{若 } \phi, \text{ 則 } \varphi) = \mathbf{p}(\varphi/\phi) = \mathbf{p}(\phi \& \varphi)/\mathbf{p}(\phi)^5$$

根據這樣的語意論，(1)與(2)的值會是沒有定義的，因為條件句前件為假會使得分數的分母為 0。⁶所以，亞當斯對條件句的說明似乎優於古典邏輯，儘管亞當斯認為條件句不具有真假值，而且限制條件句的前件與後件不能是條件句。

在一九七〇年的文章裡，史東內克認為我們可以忽略上述兩個美中不足之處，並且有了下列對條件句為真機率的主張：⁷

$$(S) \text{對任何命題 } \phi \text{ 與 } \varphi, \mathbf{p}(\text{若 } \phi, \text{ 則 } \varphi) = \mathbf{p}(\varphi/\phi) = \mathbf{p}(\phi \& \varphi)/\mathbf{p}(\phi)$$

許多學者會很樂意的接受(S)，因為：一、無論是相信程度或是可信度，它們通常意指我們相信某命題為真的程度。假設我相信「今年夏天會很熱」的程度很高(或

⁴ 以下兩個例子僅做了文詞上的修飾，表達的論點不變。

⁵ 事實上，亞當斯的主張只有前一個等式，亦即「對任何非條件句的命題 ϕ 與 φ , $\mathbf{b}(\text{若 } \phi, \text{ 則 } \varphi) = \mathbf{p}(\varphi/\phi)$ 」(Adams, 1965)；因為後一個等式「 $\mathbf{p}(\varphi/\phi) = \mathbf{p}(\phi \& \varphi)/\mathbf{p}(\phi)$ 」是一般機率教科書對條件機率的定義，故在此直接使用 (Skyrms, 1986; Hacking, 2001)。此外，(S)、(G)與(G')也是同樣的情況。

⁶ 或許有人會針對(1)而主張亞當斯的機率語意論也不夠好，因為他的語意論無法處理前件為假的條件句。儘管在一九六五年的文章裡，亞當斯承認他的語意論有這樣的問題，但是在一九七五年的書裡，他已經解決了這個問題。

⁷ 在此，有些學者或許會質疑(S)與(A)的差異是否只有(一)條件句是否具有真假值；以及(二)條件句的前後件是否限制不能是條件句。另一個可能的差異是：(S)中的函數 **p** 是否就是(A)中的函數 **b**；換句話說，史東內克是否會主張條件句的為真機率就是條件句的可信度。基本上，真值條件不會等同相信條件或是可信度，因為可信度是相對於時間與認知主體的，而真值條件僅依賴在世界的模樣，故本文認為史東內克不會主張條件句的為真機率就是條件句的可信度。不過因為這項差異對之後的討論影響不大，故在文中省略，僅列出文獻中常討論的差異。

是說「今年夏天會很熱」的可信度很高)，這代表我相信「今年夏天會很熱」為真的機率很高。二、基於語言的組構性 (compositionality)，許多學者相信條件句的前件或後件可以是條件句。因此，相對於古典邏輯與亞當斯主張的(A)，(S)似乎為條件句提供了一個較佳的解釋。

在一九七六年的文章裡，路易士論證(S)是一個不可接受的論點，因為我們可以從古典機率理論的幾個定理，加上(S)，推導出 $p(\text{若}\phi, \text{則}\varphi) = p(\varphi)$ ，換句話說， ϕ 與 φ 會是兩個機率上獨立的命題。⁸但是(S)是一個對任意命題都成立的主張，所以上述的結果會是一個荒謬的結果，因為我們就算拿兩個機率上不獨立的命題來推導，該等式仍會成立。因此，為了阻止該等式成立，我們必須限制自然語言，使得語言中不存在有三個機率不為 0 的命題，而且這三個命題兩兩不相容 (pairwise incompatible)。路易士稱這樣受限的語言為瑣碎的語言，而我們的自然語言很明顯不是瑣碎的，⁹所以我們不能用(S)來解釋條件句。

基本上，路易士的思路是這樣的：古典機率理論加上(S)會推導出荒謬的等式——對任何命題 ϕ 與 φ ， $p(\text{若}\phi, \text{則}\varphi) = p(\varphi)$ ——，而避開這個荒謬等式的方式會導致平凡性結果，亦即是將自然語言瑣碎化。如果我們想要避開平凡性結果，我們就必須放棄古典機率理論或是(S)。基於古典機率理論有良好的根基，我們應該放棄(S)，亦即反對史東內克對條件句機率的主張。這導致了許多學者相信平凡性結果是一個條件句理論要處理的問題，因為古典機率理論加上(A)，並不會推導出荒謬的等式。¹⁰所以對於條件句，我們應該採取亞當斯的想法而主張條件句不具有真假值，而且條件句的前件或後件也不能是條件句。

叁、普遍化的平凡性結果

本節將提出普遍化的平凡性結果，並指出平凡性結果不應該是條件句理論需要處理的問題。另一方面，放棄(S)不是解決平凡性結果的唯一方式，我們也可以透過對古典機率理論做修正來避開平凡性結果。

讓我們先跟隨路易士的推論：古典機率理論加上(S)，我們可以推導出「對任何命題 ϕ 與 φ ， $p(\text{若}\phi, \text{則}\varphi) = p(\varphi)$ 」這個荒謬的等式。為了不推導出該等式，我們應該放棄(S)。放棄(S)的意思是，條件句的機率不會等價於相對應的條件機率。不過，就條件機率而言，雖然自然語言中的「若...，則...」不適合被理解為條件機率，但是或許在自然語言裡，有一個語句連接詞是可以用條件機率來理解的。因為在古典機率理論被發展出來之前，我們應該就有條件機率的觀念，而在表達的時候，正是透過自然語言中的某個語句連接詞來表示。一個最佳的候選人就是「給定」(given)，因為在機率的教科書中，這個連接詞總是被用來說明條件機

⁸ 細部的證明請見附錄第一部分。

⁹ 讓我們考慮「骰子擲出偶數」與「骰子擲出六點」這兩個命題。於是我們會有三個機率不為 0 的命題：「骰子擲出偶數而且骰子擲出六點」、「骰子擲出偶數，但骰子沒有擲出六點」以及「骰子沒有擲出偶數，也沒擲出六點」。此外，這三個命題兩兩不相容，亦即任兩個命題的連言的機率是 0。上述的例子是在說明我們的語言不會是瑣碎的。

¹⁰ 細部的證明請見附錄第二部分。

率的概念 (Skyrms, 1986; Hacking, 2001)。¹¹於是我們可以有下列的主張：

$$(G) \text{對任何命題}\phi \text{與}\varphi, \mathbf{p}(\phi \text{給定}\varphi) = \mathbf{p}(\varphi/\phi) = \mathbf{p}(\phi \& \varphi)/\mathbf{p}(\varphi)$$

(G)看起來應該會比(S)可信的多，否則無法說明為什麼機率教科書都這樣使用。然而不幸的是，結合古典機率理論與(G)，我們仍可推導出一個荒謬的等式，亦即對任何命題 ϕ 與 φ ， $\mathbf{p}(\phi \text{給定}\varphi) = \mathbf{p}(\varphi)$ 。¹²如果按照路易士的思路，我們必須放棄(G)，否則無法避開平凡性結果，不過這將會導致一個困惑，亦即為什麼機率教科書都使用「給定」來說明條件機率呢？

讓我們先擱置上述的疑惑，將問題指向「給定」，也就是說，自然語言中的「給定」並不是條件機率概念的一個完美複本 (counterpart)。但是自然語言裡，存在有一個連接詞是條件機率概念的完美複本，讓我們稱之為「*」。¹³於是我們可以有以下的論點：

$$(G') \text{對任何命題}\phi \text{與}\varphi, \mathbf{p}(\phi * \varphi) = \mathbf{p}(\varphi/\phi) = \mathbf{p}(\phi \& \varphi)/\mathbf{p}(\varphi)$$

(G')是一個更弱的主張，因為它並不明確指出哪一個自然語言中的連接詞是條件機率，所以會比(G)或(S)更為可信。不過，結合古典機率理論與(G')，我們仍可以推導出一個荒謬的結果，亦即對任何命題 ϕ 與 φ ， $\mathbf{p}(\phi * \varphi) = \mathbf{p}(\varphi)$ 。¹⁴於是按照路易士的思路，我們又得放棄(G')，除非我們認為自然語言中，不存在有一個不瑣碎的連接詞是可以條件機率來理解的。讓我們稱之為「普遍化的平凡性結果」，而路易士的平凡性結果只是它的一個個例（將(G')替換成(S)的個例）。

以下讓我們分兩個部分來論述：一、平凡性結果究竟是不是一個條件句理論所需要處理的問題（平凡性結果的哲學意涵究竟為何）；二、我們該如何解釋自然語言與形式語言（古典機率理論）之間的不等同（自然語言中是否存有一個不瑣碎的連接詞是相對應於條件機率）。

根據路易士的推論，平凡性結果是條件句理論需要處理的問題，因為如果我們想避開荒謬的等式，而且不想瑣碎化自然語言，我們唯一能做的就是放棄(S)。基於這樣的理由，許多學者轉向(A)而對條件句採取一種非真值條件式的語意論 (Adams, 1965, 1975; Bennett, 2003; Edgington, 1986, 1995, 2006)。不過，透過普遍化的平凡性結果，我們發現，無論我們如何取代(S)，荒謬的等式仍會成立。難道我們在用(G)來取代(S)時，我們要主張那樣作所得到的平凡性結果是一個「給

¹¹ 有些學者或許會主張「若...，則...」跟「...給定...」是一樣的語句連接詞，所以這部分的討論是多餘的。事實上，在機率教科書裡，上述兩個連接詞是被視為不同的連接詞，儘管筆者同意那兩個連接詞的意義是相似的，本文仍採取一般機率教科書的看法，對兩者做不同的處理。

¹² 細部的證明請見附錄第三部分。

¹³ 或許有些學者會質疑這項假設，在此為了討論方便，讓我們先同意這項假設，之後會有論證來支持這項假設。

¹⁴ 細部的證明請見附錄第四部分。

定理論」(theory of given) 需要處理的問題嗎？很明顯的，我們不會這樣認為，所以平凡性結果不應該是條件句所需要處理的問題。另一方面，我們發現，荒謬的等式可以從古典機率理論與任何一個跟條件機率有關的論點推導出來。換句話說，如果我們想避開荒謬的等式，而且相信自然語言中存在有一個不瑣碎的連接詞可以跟條件機率的觀念相對應，我們應該把問題的矛頭指向古典機率理論。¹⁵

首先，我們確實想避開荒謬的等式，因為我們很容易找到兩個機率上不獨立的命題來使得該等式不成立。以擲骰子為例，「擲出六點」與「擲出偶數」是兩個機率上不獨立的命題，所以「若擲出偶數，則擲出六點」的機率是 $1/3$ ，但是「擲出六點」的機率是 $1/6$ ，這兩個值很明顯不相等，這也是為什麼我們會認為該等式是荒謬的原因。

其次，自然語言中是否存在有一個不瑣碎的連接詞是跟條件機率的觀念相對應的呢？基本上，在古典機率理論被發展出來之前，我們一定有一些先於理論的 (pre-theoretical) 機率概念，而機率理論的發展正是為了精確表徵這些概念。不過，就算同意這一點，也許有人會認為我們先於理論的概念與純粹數學的語言(古典機率理論或任何形式系統) 之間只會有近似的關係，絕不會等同。¹⁶ 針對這樣的問題，有兩個本質上迥異的策略：語用與語意。根據語用的策略，在意義上，自然語言比形式語言還要豐富，但是這不代表兩者之間有不同的語意，因為自然語言多出來的意義是從脈絡 (context) 或是一些對話合作原則 (cooperative principles) 引申出來的 (Stalnaker, 1975; Grice, 1989)。舉例來說，自然語言中的「而且」在某些脈絡會跟古典邏輯中的「&」多出一些意義，如下：¹⁷

(3) 張三結婚了，而且 (張三) 有小孩了。

(4) 張三有小孩了，而且 (張三) 結婚了。

直覺上，我們會認為(3)與(4)有不同的意義，儘管表面上兩者有一樣的組成成分 (一樣的連接詞「而且」以及「張三結婚了」與「張三有小孩了」)。根據葛萊斯 (Grice)，(3)與(4)的差異在於聽眾會認為說話者會以事件發生的次序來斷言，所以(4)對話上蘊含 (conversationaly implicate) 張三是奉子成婚的。不過，從語意的角度來看，(3)與(4)是一樣的，而「張三是奉子成婚」這部分的意涵是從對話上的合作原則 (根據事件的發生次序來斷言) 引申出來的，不算是(4)語意的一部分。因此，類似的狀況可能也發生在「若...，則...」(或是「給定」) 與條件機率上，使得兩者之間有種不對稱性，儘管兩者在語意上是一樣的。

¹⁵ 另一個解讀普遍化平凡性結果的方式是：(跟隨路易士的思路) S 類的平凡性結果是條件句理論必須處理的問題，G 類的平凡性結果是給定理論需要處理的問題...。因為這樣的解讀似乎預設了古典機率理論必然為真，而該預設正是本文想挑戰的論點，故在此不做這樣的解讀。

¹⁶ 在邏輯或邏輯哲學的討論裡，這樣的想法時常被提出來，特別是弗列格 (Frege) 發展出當代符號邏輯之後，許多哲學家與邏輯學家時常在爭辯自然語言與形式語言之間的關係。(Read, 1995)。

¹⁷ 如同之前所說，「&」可以透過「 \neg 」與「 \supset 」來定義，所以 $f_{\&}(x, y) = 1 - \max(1-x, 1-y)$ 。

由於古典機率理論是一個定義嚴謹的形式系統（如果給予一個集合論的模型，這樣的語言將會是一個數學的語言），所以平凡性結果必然會出現，除非我們可以指出哪一條古典機率理論的定理是錯誤的。另一方面，我們不認為自然語言會導致荒謬的等式，除非有人相信「若擲出偶數，則擲出六點」的機率等同於「擲出六點」的機率。因此，為了解釋形式系統與自然語言之間的不對稱性，我們可以仿效葛萊斯對「而且」的解釋，在古典機率理論的定理上加入一些語用限制，使得平凡性結果不會（實際）出現，例如，對條件化的使用做限制，避免條件化在條件句的前件或後件（或前件或後件的否定）上。這樣的限制正符合我們使用自然語言的直覺，因為當我們將任何條件句「若 ϕ ，則 φ 」條件化到 ϕ 上，其機率值不變；條件化在 φ 上，其機率值為 1。無論是哪個情況，都無助於我們知識上的增加。¹⁸

從另一個角度來看，也許有人會認為「若...，則...」與條件機率的觀念在語意上就是不同的，所以我們應該企求一個不同的機率理論，以避開平凡性結果。這樣的策略就可稱為語意策略：既然古典機率理論無法正確掌握自然語言中的機率概念，我們就應該提出一個更能掌握自然語言的機率理論。不過，普遍化的平凡性結果是否足以撼動古典機率理論呢？這個部分將是下一節的主要議題。¹⁹

最後，也許有人會認為自然語言中不存在有一個不瑣碎的連接詞是可以用條件機率來理解的。如同之前所提及的，形式系統的發展是為了表徵我們的概念系統（或自然語言），而不是先有形式系統，然後才到我們的概念系統（自然語言）中找尋相對應的複本。²⁰所以，為了避開普遍化的平凡性結果，主張自然語言中不存在有那樣的連接詞似乎是本末倒置，特別是機率教科書中確實是使用「給定」來說明條件機率。所以，如果有學者認為自然語言中不存在這樣的連接詞，它們將很難說明為什麼機率教科書中，毫無猶豫的使用「給定」來說明條件機率。因此，除非有更好的理由來否認有那樣的連接詞，我們應該先承認其存在。

在此先做的小結。

- 一、古典邏輯將「若...，則...」視為一個真值函數；
- 二、亞當斯認為古典邏輯對條件句的解釋是有問題的，於是他提出了 (A)——「對任何非條件句的命題 ϕ 與 φ ，條件句『若 ϕ ， φ 』的可信度對等價於條件機率『 $p(\varphi/\phi)$ 』」——；
- 三、受到亞當斯的影響，史東內克也提出一個相似的看法(S)——「對任何命

¹⁸ 限於篇幅，本文將不會仔細討論處理平凡性結果的語用策略。

¹⁹ 雖然反對古典機率理論與反對「條件句的機率等於條件機率」是兩回事，但是本文想論證的論點是：普遍化路易士的平凡性結果後，平凡性結果的問題不應該是條件句理論需要處理的問題；為了解決普遍化的平凡性結果，本文建議我們重新檢視古典機率理論。

²⁰ 有人或許會反對這樣的說法，因為我們語言中確實有些語詞是被創造來表達事物的，例如「飛機」。以前根本沒有飛機，直到飛機被發明之後，我們才創「飛機」這個詞來指稱飛機。條件機率或許是這類的事物，所以自然語言裡不存在有相對應的語詞，除非我們創造一個新語詞來指稱條件機率的觀念。這樣的回應其實是錯誤的，因為條件機率的觀念跟飛機不是一樣的事物。飛機是屬於過去沒有的東西，所以現今為了討論上需要，所以才創「飛機」來指稱；但是，條件機率的觀念是古典機率理論發展出來前就存在的，所以指稱條件機率概念的語詞當然已經存在於自然語言裡。

題 ϕ 與 ϕ ，條件句『若 ϕ ， ϕ 』的為真機率對等價於條件機率『 $p(\phi/\phi)$ 』
——；

- 四、路易士指出結合(S)與古典機率理論，我們會遇到平凡性結果的問題，所以我們應該放棄(S)；
- 五、當我們將路易士的平凡性結果普遍化後，我們發現路易士的平凡性結果不應該是條件句理論需要處理的問題；
- 六、兩個解決普遍化平凡性結果的方式：語用策略透過對古典機率理論的某些定理做語用限制，使得平凡性結果不會出現；語意策略透過提出一個新的機率理論來避開平凡性結果的威脅。

肆、必輸賭注契約及其哲學意涵

普遍化的平凡性結果是否足以撼動古典機率理論？對大多數學者來說，答案應該是否定的，因為有太多理據支持古典機率理論了，特別是機率教科書中常見的「必輸賭注契約論證」。所以本節將會仔細地檢視必輸賭注契約論證的合理性，並透過海耶克來提出一個有效的必輸賭注契約論證。

首先，讓我們設定討論必輸賭注契約論證的架構，亦即賭博的架構。一個賭博會涉及四樣東西：被下注的命題、賭金、願意下注的金額，以及做為買家（閒家）或賣家（莊家）。²¹

以下讓我們舉一個簡單的例子來說明上述的架構。假設張三跟李四對下列的命題做賭注：

(5) 骰子擲出偶數點。

假設張三下注 X 金額在(5)上，而李四則是該賭注的莊家。換句話說，如果(5)為真，李四必須付給張三贏得的彩金 Y 。另一方面來看，我們也可以說，李四下注 Y 金額在(5)的否定上，而張三則是這個賭注的莊家——如果(5)為假，張三必須付給李四贏得的彩金 X 。於是，在這個例子裡，被下注的命題就是(5)、賭金是 $X+Y$ 、願意下注的金額會相對於買家或賣家而不同（以張三做為買家來說，願意下注的金額是 X ；以李四為買家來說，願意下注的金額是 Y ）。另外，從上述的概念，我們可以算出張三（或李四）願意下注在(5)的賭率（betting rate），亦即張三下注的金額除以賭金（ $X/X+Y$ ）。²²

接著，讓我們看什麼樣的賭率會是公平的（fair）、對買家有利的（favorable），以及對買家不利的（unfavorable）。在此之前，讓我們先介紹期望值的概念。拿

²¹ 請注意：以下介紹的概念彼此是可以互相推導的，換句話說，只要確定其中幾項的值，我們就可以推導出其他的值。

²² 一般賭徒不會談論賭率，而會談論賠率（odds）。基本上，這兩個語詞是用來談論一樣的概念：給定 X 是張三下注的金額，賭金為 $X+Y$ ，賭率會是 $X/X+Y$ ，而賠率是 X 比 Y （熟悉的黑話是，一賠一，當機率是 $1/2$ ）。在此，我們只使用賭率的說法（Skyrms, 1986: 175-184、Hacking, 2001: Ch. 13）。

之前的例子來說，下注在(5)的期望值會等於(5)為真的機率 k 乘上獲益 Y 加上(5)為假的機率 $(1-k)$ 乘上獲益 $-X$ ，亦即 $k \times Y - (1-k) \times X$ 。一個賭注的賭率是公平的，若且唯若，該賭注的期望值為 0；對買家有利的，若且唯若，期望值為正數；對買家不利的，若且唯若，期望值為負數 (Skyrms, 1986: 178)。

現在讓我們來看看必輸賭注契約論證。讓我們先依序說明「必輸賭注契約」的定義、「必輸賭注契約定理」、「必輸賭注契約反定理」與「必輸賭注契約論證」。「必輸賭注契約」是指一組賭注，其中每一注你都認為是公平的，但是這組賭注確保了你一定會輸。「必輸賭注契約定理」意指「如果你違反古典機率理論的公設，存在有必輸賭注契約讓你必輸」。²³「必輸賭注契約反定理」意指「如果你遵守古典機率理論的公設，不存在有必輸賭注契約讓你必輸」。從「必輸賭注契約定理」與「必輸賭注契約反定理」，我們可以推論出「理性要求我們遵守古典機率理論的公設」(Skyrms, 1986; Hacking, 2001; Hájek, 2005)。

所謂的古典機率理論的公設可以用下列三條式子來代表：²⁴ (p 代表從命題到實數的函數)

(P1) 對任何命題 ϕ ， $0 \leq p(\phi) \leq 1$ 。

(P2) 對必然真理 ϕ ， $p(\phi) = 1$ 。

(P3) 對任何共同不一致的 (jointly inconsistent) 命題 ϕ 與 φ ， $p(\phi \vee \varphi) = p(\phi) + p(\varphi)$ 。

現在我們可以證明必輸賭注契約定理與必輸賭注契約反定理。假設張三是一個謹慎的賭徒，他認為必然真理 (例如，(6) 骰子擲出偶數點或是不擲出偶數點) 的機率會小於 1，例如，0.9。換句話說，他違反了(P2)。假設李四做了下列的賭注契約：

賭注一：張三做為買家，下注在(6)的否定上 1 塊錢 (如果(6)為假，李四要付給張三 9 塊錢)。

但是因為(6)不可能為假，所以如果張三真的跟李四做了賭注一的契約，他一定會損失 1 塊錢，此時我們就說賭注一是一個必輸賭注契約。²⁵類似的證明可以推導出違反上述三條古典機率理論的公設會存在有一本必輸的賭注契約，使得違反的人一定會在賭局中有所損失。於是必輸賭注契約定理為真。

相反的，如果張三遵循古典機率理論的公設，我們可以推導出不存在有一本

²³ 請注意：此處的「...每一注你都認為是公平的...」裡的「公平」跟之前定義的「公平賭率」概念不同。必輸賭注契約論證一開始並不預設賭徒會遵守古典機率理論的定理，所以「...每一注你都認為是公平的...」不必然符合古典機率理論中對「公平賭率」或「公平賭注」的定義。

²⁴ 其中幾個常見的定理都可以從這三個定理推導出來，故省略。證明請見附錄第一部分。

²⁵ 有學者或許會不滿意這個例子，因為通常必輸賭注契約論證會用「一組」賭注來說明，而不是「一個」賭注。為了說明方便，本文使用了最簡便的說明，因為這部分的證明很容易在機率教科書中找到 (Skyrms, 1986; Hacking, 2001)。對必輸賭注契約論證的細部證明有興趣的學者，可參閱機率教科書或海耶克二〇〇五年的文章。

必輸的賭注契約。假設張三與李四正在對下面的命題做賭注：

- (7) 骰子擲出一點。
- (8) 骰子擲出六點。
- (9) 骰子擲出一點或六點。

首先，我們知道(7)與(8)的機率都是 $1/6$ ，而(9)的機率是 $1/3$ 。根據之前介紹過的賭率、賭金，與願意下注的金額之間的關係，假設賭金是 6 萬，我們可以知道張三會願意下注在(9)上 2 萬。如果(9)為真，李四要付給張三 4 萬。²⁶另一方面，李四分別下注在(7)與(8)上 1 萬。如果(7)為真，張三要付給李四 5 萬。假設這樣的契約成立，我們會發現如果骰子擲出一點，張三會從李四那邊贏得 4 萬，因為(9)為真；但是因為李四下注在(7)，所以張三必須付給李四 5 萬，加上李四下注在(8)輸掉的 1 萬，輸贏打平。

	下注在(7)	下注在(8)	下注在(9)	損益
擲出一點	5	-1	4	0
擲出六點	-1	5	4	0

因此，必輸賭注契約反定理也為真。於是，結合必輸賭注契約定理與必輸賭注契約反定理，我們可以推論出：理性會要求我們遵守古典機率理論的公設，因為我們不想要有必輸的結果。

目前看起來，必輸賭注契約論證似乎提供了一個好理由來支持古典機率理論的公設。但是海耶克指出，這樣的論證是一個無效論證，因為對張三來說是一個必輸的賭注契約，但是對李四來說卻是一個必贏的賭注契約。論證如下。

「必贏賭注契約」是指一組賭注，其中每一注你都認為是公平的，但是這組賭注確保了你一定會贏。「必贏賭注契約定理」意指「如果你違反古典機率理論的公設，存在有必贏賭注契約讓你必贏」。「必贏賭注契約反定理」意指「如果你遵守古典機率理論的公設，不存在有必贏賭注契約讓你必贏」。從「必贏賭注契約定理」與「必贏賭注契約反定理」，我們可以推論出「理性要求我們違古典機率理論的公設」。證明的方式很簡單，我們只需要轉換必輸賭注契約的買家變成賣家，賣家變成買家。如同之前所說，對張三來說是必輸的賭注契約，但是對李四來說卻是必贏的賭注契約。因此，必輸賭注契約論證無法支持古典機率理論 (Hájek, 2005: 142)。²⁷

²⁶ 這樣的設定是公平的，因為根據之前的介紹，一個賭注是公平的，若且唯若，該賭注的期望值為 0。 $4 \times 1/3 + (-2) \times 2/3 = 0$ 。基於同樣的理由，以下的設定也都是公平的。

²⁷ 在指出必輸賭注契約論證是個無效論證後，海耶克隨即討論了一個可能的回應：我們比較容易找到必輸的賭注契約。因此，根據這樣的經驗假設，我們能證明必輸賭注契約定理，但不能證出必贏賭注契約定理。針對這個回應，海耶克的回應是：根據機率理論所作的計算，完全是數學上的結果，跟經驗世界毫無關係；因此，拿一個經驗上的假設來回應，似乎是搞錯標靶了 (Hájek,

在指出必輸賭注契約論證的問題後，海耶克試圖修改原來的必輸賭注契約論證，並使得修改後的必輸賭注契約論證變成一個有效的論證，亦即我們無法對修改後的必輸賭注契約論證構作出一個相對應的必贏賭注契約論證。讓我們回到「必輸賭注契約」的定義。海耶克認為雷姆濟在當初提出必輸賭注契約論證時，就已經暗示著「必輸賭注契約」的定義應該是下列的樣子：

「必輸賭注契約*」：一組賭注，其中每一注你都認為是公平或是對你有利的，但是這組賭注確保了你一定會輸。

於是根據這樣的修改後，我們會得到相對應的必輸賭注契約定理*、必輸賭注契約反定理*、必贏賭注契約*、必贏賭注契約定理*，與必贏賭注契約反定理*，如下：

「必輸賭注契約定理*」：如果你違古典機率理論的公設，存在有必輸賭注契約（每一注你都認為是公平的或是對你有利的）讓你必輸。

「必輸賭注契約反定理*」：如果你遵守古典機率理論的公設，不存在有必輸賭注契約（每一注你都認為是公平的或是對你有利的）讓你必輸。

「必贏賭注契約*」：一組賭注，其中每一注你都認為是公平或是對你有利的，但是這組賭注確保了你一定會贏。

「必贏賭注契約定理*」：如果你違古典機率理論的公設，存在有必贏賭注契約（每一注你都認為是公平或對你有利的）讓你必贏。

「必贏賭注契約反定理*」：如果你遵守古典機率理論的公設，不存在有必贏賭注契約（每一注你都認為是公平或是對你有利的）讓你必贏。

很明顯的，「必輸賭注契約定理*」會被「必輸賭注契約定理」蘊含，因為任何你認為是公平的賭注，你都會認為它們也是公平或對你有利的。所以修改後的定理仍會成立。「必輸賭注契約反定理*」與「必贏賭注契約定理*」也基於相同的理由而成立。但是，「必贏賭注契約反定理*」卻不成立，因為這些賭注都是你認為公平或對你有利的，所以儘管你遵守古典機率理論的公設，仍可能存在有必贏賭注契約*，使得你必贏。

從「必輸賭注契約定理*」與「必輸賭注契約反定理*」，我們知道理性會要求我們遵守古典機率理論的公設，否則我們就會有必輸的結果。因此，我們對命題的主觀機率賦值必須遵循古典機率理論的公設。

伍、巧題的必輸賭注契約論證

2005: 143-5)。本文同意海耶克的說法，因為必輸賭注契約跟必贏賭注契約實際上是一體的兩面，只要經驗世界裡存在有一本必輸賭注契約，相對應就存在有一本必贏賭注契約，故在此忽略這部分的討論。

本節將論證必輸賭注契約論證中的「必輸賭注契約」、「必輸賭注契約定理」與「必輸賭注契約反定理」已經預設了古典機率理論的定理，所以我們當然可以推導出「理性要求我們遵守古典機率理論的定理，否則我們就會有必輸的結果」。

以下讓我們回到之前的說明，仔細看看古典機率理論如何論證一組賭注是否為公平。

假設張三與李四正在對下面的命題做賭注：

- (7) 骰子擲出一點。
- (8) 骰子擲出六點。
- (9) 骰子擲出一點或六點。

首先，我們知道(7)與(8)的機率都是 $1/6$ ，而(9)的機率是 $1/3$ 。根據之前介紹過的賭率、賭金，與願意下注的金額之間的關係，假設賭金是 6 萬，我們可以知道張三會願意下注在(9)上 2 萬。如果(9)為真，李四要付給張三 4 萬。另一方面，李四分別下注在(7)與(8)上 1 萬。如果(7)為真，張三要付給李四 5 萬。假設這樣的契約成立，我們會發現如果骰子擲出一點，張三會從李四那邊贏得 4 萬，因為(9)為真；但是因為李四下注在(7)，所以張三必須付給李四 5 萬，加上李四下注在(8)輸掉的 1 萬，輸贏打平。

在此，值得注意的是，上述賭注的賭金、願意下注的金額，以及賭率（命題為真的機率）之間必須滿足某種關係，否則將無法推論出「必輸賭注契約反定理」。²⁸ 譬如說，假設張三願意下注在(9)的金額是 1 萬，因為(9)的機率是 $1/3$ ，所以賭金為 3 萬。在這樣的情況下，張三仍願意以上述的方式賣給李四賭注，於是我們可以做出下列的表：

	下注在(7)	下注在(8)	下注在(9)	損益(對張三)
擲出一點	5	-1	2	-2
擲出六點	-1	5	2	-2

從上表，我們發現，儘管張三與李四的賭注個別來看都是公平的，但是如果推論出「必輸賭注契約反定理」，亦即如果遵守古典機率理論，則不存在有一個必輸賭注契約，我們還需要讓該組賭注的賭金一致。換句話說，我們會有這樣的等式：假設賭金是 L ， $L \times 1/3 = L \times 1/6 + L \times 1/6$ 。所以， $L \times 1/3 = L \times (1/6 + 1/6)$ 。當等式的兩邊除上 L ，正是(P3)要表達的意思。因此，我們發現這樣的計算預設了(P3)，否則無法解釋為什麼輸贏會打平，亦即這是一組公平的賭注。

也許有人會認為這根本不算是巧題，因為這正顯示出古典機率理論的定理確

²⁸ 提醒一下：假設願意下注的金額是 X ，贏得的彩金是 Y ，則賭金為 $X+Y$ ，賭率為 $X/(X+Y)$ 。

實符應了我們主觀機率（或相信程度）的運作。如果真是如此，我們應該接受普遍化的平凡性結果，因為古典機率理論如實的符應我們的信念系統。或是說，我們應該接受「 $p(\phi * \varphi) = p(\varphi)$ 」這個等式，無論它多麼荒謬。我認為，無論是哪種選擇（包含拒絕古典機率理論）都需要付出代價。

另一方面，以下將指出必輸賭注契約論證在採用非古典機率理論下，仍會是一個有效的論證，所以就算我們接受必輸賭注契約論證，這也不代表我們要接受古典機率理論。假設我們修改(P3)，如下：

$$(P3') \text{對任何共同不一致的命題}\phi\text{與}\varphi, p(\phi \vee \varphi) = p(\phi) + p(\varphi) - p(\phi \wedge \varphi)。$$

如同之前提過的，機率理論的各個公設之間可以相互推導，所以(P3')看似跟(P3)差異不大，實則不然。根據普里斯特的雙面真理論，有些矛盾句為真，例如，說謊者悖論、前言悖論、羅素悖論等。因此，對任何命題 ϕ ， $p(\phi \wedge \neg\phi) \geq 0$ (2006)。²⁹根據(P2)， $p(\phi \vee \neg\phi) = 1$ ；根據(P3')， $p(\phi \vee \neg\phi) = p(\phi) + p(\neg\phi) - p(\phi \wedge \neg\phi)$ ，所以 $1 = p(\phi) + p(\neg\phi) - p(\phi \wedge \neg\phi)$ ，因此，對任何命題 ϕ ， $p(\phi) + p(\neg\phi) \geq 1$ 。

回到必輸賭注契約論證，因為 $p(\phi) + p(\neg\phi) = 1$ 會蘊含 $p(\phi) + p(\neg\phi) \geq 1$ ，而且 $p(\phi \wedge \neg\phi) = 0$ 會蘊含 $p(\phi \wedge \neg\phi) \geq 0$ 。所以，古典機率理論下為真的，都會在這個非古典機率理論下為真。³⁰因此，必輸賭注契約論證也可以用來支持這個非古典機率理論。如果有人想拿必輸賭注契約論證來支持古典機率理論，他將會失敗，除非巧題。總之，無論是哪個情況，必輸賭注契約論證都不會是一個好理由來支持古典機率理論。

陸、非古典機率理論與平凡性結果

本節將簡述普里斯特關於矛盾句的想法，並說明根據雙面真理論而建構的非古典機率理論可以幫助我們避開平凡性結果。

在二〇〇六年出版的書裡，普里斯特除了提出雙面真理論的語意論，還回應了許多該語意論可能會被批評的地方。特別是語用論的部分，因為許多學者相信：一、我們不可能斷言矛盾，因為當某人斷言 P 時，意指 $\neg P$ 被排除了，如果雙面真理論是真的，斷言將不會有內容；二、我們不可能相信矛盾句，因為我們不可能具有不一致的信念系統；三、就算可能相信矛盾，也不可能「理性的」相信；四、承認矛盾將無法說明信念之間的關係，因為這將顛覆長久建立起來的古典機率理論。

根據上述四個批評，以下將簡述普里斯特的回應。針對斷言的部分，普里斯

²⁹ 請注意：普里斯特的主張是「有些矛盾句為真」，並不是「所有矛盾句為真」。換句話說，對「 $\phi \wedge \neg\phi$ 」這個語句形式的個例來說，有些個例為真（例如，說謊者悖論），而有些個例為假（例如，「雪是白的，而且雪不是白的」）。

³⁰ 在討論「必輸賭注契約定理」與「必輸賭注契約定理*」時，因為兩者的差異只在「…公平的…」與「…公平或對你有利的…」，所以「必輸賭注契約定理」會蘊含「必輸賭注契約定理*」（ ϕ 蘊含 $\phi \vee \varphi$ ）。類似的理由使得古典機率理論會蘊含這個非古典機率理論。

特認為一個語句要具有內容，根本不必要排除任何東西。我們可以把一個語句的內容想成是它所具有的資訊。於是我們只須要看兩個語句是不是具有相同的資訊，就可以判斷它們是否有相同的內容。很容易給一個「內容」概念的形式分析。我們可以將一個語句 α 的內容定義為它所蘊含的語句集合，或是 $\langle W_1, W_2 \rangle$ 這樣的有序序列，其中 W_1 是 α 為真的可能世界集合，而 W_2 是 α 為假的可能世界集合。實際上，這兩種刻畫的方式是相同的。給定這樣的刻畫方式，不同的邏輯真理會有不同且非瑣碎的內容，不同的矛盾句或邏輯假理也一樣（2006: 95）。³¹

針對信念的部分，普里斯特認為那個看法根本就是錯的。實際上，許多（大多數）人相信矛盾句。許多的悖論就是很好的例子，例如羅素悖論（「不屬於自己」所形成的集合既在自己裡面，也不在自己裡面）。

針對理性相信的部分，普里斯特認為前言悖論是一個很好的反例，因為一個人在歷經痛苦的研究過程後，寫出了一本書，並主張 a_1 、 a_2 、...而且 a_n 。他是很理性的去相信這些語句的。不過他也意識到，不會有一本書是完全不出錯的。歸納論證在這裡提供了很好的理由。因此，他相當理性的相信 $\neg a_1$ 、 $\neg a_2$ 、...或 $\neg a_n$ 。很明顯的，他的信念集合是不一致的。不過他相信它，而且很理性的相信。

針對信念之間的關係，之前對(P3)的修改，以及增加「 $p(\phi \wedge \neg \phi) \geq 0$ 」，我們可以構作出一個非古典的機率理論。而根據這個理論，我們仍可以說明信念之間的關係，所以這樣的批評也是不成立的。

總之，普里斯特認為，如果還有人認為我們不可能相信矛盾、或不可能理性的相信矛盾，其實他們都沒有提供好理由來支持他們的立場，因為上述的回應一一的回答了批評者的質疑。如果批評者還不滿意，普里斯特認為這就是丐題，因為批評者已經先入為主的將「矛盾是不好的」當作是前提去論述，難怪他們會有那樣的主張與立場（2006）。以下將說明之前的非古典機率理論可以幫助我們避開平凡性結果。

路易士的平凡性結果（或任何形式的平凡性結果）的證明使用了 $p(\phi \wedge \neg \phi) = 0$ 這個等式，因為在上述的非古典機率理論裡，該等式可能不成立，故平凡性結果不會出現（或是說，荒謬的等式不會出現）。請注意：本文的論證並不是想證明 $p(\text{若}\phi, \text{則}\varphi) = p(\varphi)$ 這個等式一定不會成立，因為很明顯的，當 ϕ 與 φ 是機率上獨立的命題時，該等式的成立才是合理的。因此，本文想論證的只是：並不是對所有的命題 ϕ 與 φ ， $p(\text{若}\phi, \text{則}\varphi) = p(\varphi)$ 。

在此做個小結。

- 一、一般學界認為必輸賭注契約論證提供了一個好理由來支持古典機率理論；
- 二、根據海耶克，一般版本的必輸賭注契約論證是一個無效論證，因為我們可以構作出一個必贏的賭注契約論證，而根據該論證，我們會推論出「理性會要求我們違古典機率理論的公設」；

³¹ 有些學者可能會質疑，這樣的形式語意學是否真能讓不同的邏輯真理蘊含不同且非瑣碎的內容，由於該論點是有關雙面真理論的形式語意論，故在此忽略。

- 三、透過修改原先的必輸賭注契約論證，海耶克論證修改後的必輸賭注契約論證會是個有效論證，因為我們無法構作出一個相對應的必贏賭注契約論證；
- 四、本文指出必輸賭注契約論證（無論是否修改）是個丐題的論證，因為：首先，該論證在使用「公平」或「對買家有利的」的概念時，已經預設了古典機率理論的定理；其次，本文根據普里斯特的雙面真理論所構作出來的非古典機率理論，仍會使必輸賭注契約論證是個有效論證；
- 五、根據雙面真理論而來的非古典機率理論，平凡性結果將不會出現。

柒、結論

本文論證了兩個論點：一、透過普遍化路易士的平凡性結果，我們發現平凡性結果不應該是條件句理論所需要處理的問題；二、透過仔細檢視必輸賭注契約，我們發現必輸賭注契約論證丐題，所以古典機率理論並不如許多學者認為的那樣可信。

捌、附錄

第一部分：路易士平凡性結果證明

假設我們只接受下列的古典機率理論公設：

(P1) 對任何命題 ϕ ， $0 \leq p(\phi) \leq 1$ 。

(P2) 對必然真理 ϕ ， $p(\phi) = 1$ 。

(P3) 對任何共同不一致的命題 ϕ 與 φ ， $p(\phi \vee \varphi) = p(\phi) + p(\varphi)$ 。

根據(P2)， $p(\phi \vee \neg\phi) = 1$ ；根據(P3)， $p(\phi) + p(\neg\phi) = 1$ ；因此， $p(\neg\phi) = 1 - p(\phi)$ 。另外， $p(\neg(\phi \vee \neg\phi)) = 1 - p(\phi \vee \neg\phi) = 1 - 1 = 0$ ，所以矛盾句的機率值為0。最後，對任何命題 ϕ 與 φ ，如果 ϕ 與 φ 是邏輯上等值，則兩者的機率值相等。假設 ϕ 與 φ 邏輯上等值，所以 $p(\phi)$ 與 $p(\neg\varphi)$ 是互斥的，則 $p(\phi \vee \neg\varphi) = 1$ 。根據(P3)，我們知道 $p(\phi \vee \neg\varphi) = p(\phi) + p(\neg\varphi)$ ，於是 $1 = p(\phi) + p(\neg\varphi)$ ，所以 $1 = p(\phi) + 1 - p(\varphi)$ ，因此 $p(\phi) = p(\varphi)$ 。為了論述上方便，讓我們加入可推導出來的定理，如下：

(P4) 如果 ϕ 與 φ 是邏輯上等值，則 $p(\phi) = p(\varphi)$ 。

另外，假設我們接受「條件化」，亦即對每個機率函數 p 來說，會有另一個機率函數 p' ，使得下列式子成立：

(P5) 對任何命題 ϕ 與 φ ， $p(\varphi/\phi) = p'(\varphi)$ ，其中 $p(\phi) \neq 0$ 。

根據(P1-5)，我們可以推導出下列的式子：

$$(P6) \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\tau) = \mathbf{p}(\varphi/\phi \& \tau)$$

$$\begin{aligned} \text{證明：} & \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\tau) \\ &= \mathbf{p}'(\text{若}\phi, \text{則}\varphi) && (P5) \\ &= \mathbf{p}'(\varphi/\phi) && (S) \\ &= \mathbf{p}'(\phi \& \varphi)/\mathbf{p}'(\phi) && (S) \\ &= \mathbf{p}(\phi \& \varphi/\tau)/\mathbf{p}(\phi/\tau) && (P5) \\ &= \mathbf{p}((\phi \& \varphi) \& \tau)/\mathbf{p}(\tau) \times \mathbf{p}(\tau)/\mathbf{p}(\phi \& \tau) && (S) \\ &= \mathbf{p}((\phi \& \tau) \& \varphi)/\mathbf{p}(\phi \& \tau) && \text{計算} \\ &= \mathbf{p}(\varphi/\phi \& \tau) && (S) \end{aligned}$$

$$(P7) \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\varphi) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{證明：} & \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\varphi) \\ &= \mathbf{p}(\varphi/\phi \& \varphi) && (P6) \\ &= \mathbf{p}((\phi \& \varphi) \& \varphi)/\mathbf{p}(\phi \& \varphi) && (S) \\ &\text{由於}(\phi \& \varphi) \equiv ((\phi \& \varphi) \& \varphi), \text{依據}(P4), \text{推出} \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\varphi) = 1 \end{aligned}$$

$$(P8) \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\neg\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{證明：} & \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\neg\varphi) \\ &= \mathbf{p}(\varphi/\phi \& \neg\varphi) && (P6) \\ &= \mathbf{p}((\phi \& \varphi) \& \neg\varphi)/\mathbf{p}(\phi \& \neg\varphi) && (S) \\ &\text{由於} \mathbf{p}((\phi \& \varphi) \& \neg\varphi) = 0, \text{推出} \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\neg\varphi) = 0 \end{aligned}$$

$$(P9) \mathbf{p}(D) = \mathbf{p}(D/C) \times \mathbf{p}(C) + \mathbf{p}(D/\sim C) \times \mathbf{p}(\sim C)$$

證明：由於 $D \equiv ((D \& C) \vee (D \& \sim C))$ ，依據(P4)，推出

$$\mathbf{p}(D) = \mathbf{p}(D \& C) + \mathbf{p}(D \& \sim C)$$

$$\text{然後依據}(S), \text{推出} \mathbf{p}(D) = \mathbf{p}(D/C) \times \mathbf{p}(C) + \mathbf{p}(D/\sim C) \times \mathbf{p}(\sim C)$$

$$(P9') \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi) = \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\varphi) \times \mathbf{p}(\varphi) + \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\neg\varphi) \times \mathbf{p}(\neg\varphi)$$

[D:=若 ϕ ，則 φ]

$$(P10) \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi) = \mathbf{p}(\varphi)$$

$$\begin{aligned} \text{證明：} & \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi) \\ &= \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\varphi) \times \mathbf{p}(\varphi) + \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\neg\varphi) \times \mathbf{p}(\neg\varphi) && (P9') \\ &= 1 \times \mathbf{p}(\varphi) + \mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi/\neg\varphi) \times \mathbf{p}(\neg\varphi) && (P7) \\ &= \mathbf{p}(\varphi) + 0 \times \mathbf{p}(\neg\varphi) && (P8) \\ &= \mathbf{p}(\varphi) \end{aligned}$$

第二部分：(A) + 古典機率理論

根據亞當斯的想法， ϕ 與 φ 不能是條件句，但是(P6)的證明使用了「若 τ ，則若 ϕ ，則 φ 」，所以(P6)是不成立的，因此無法推導出(P10) $\mathbf{p}(\text{若}\phi, \text{則}\varphi) = \mathbf{p}(\varphi)$ 。

第三部分：給定 + 古典機率理論

$$\begin{aligned}
 \text{(P6')} \quad \mathbf{p}(\varphi \text{ 給定 } \phi/\tau) &= \mathbf{p}(\varphi/\phi \ \& \ \tau) \\
 \text{證明：} \quad \mathbf{p}(\varphi \text{ 給定 } \phi/\tau) & \\
 &= \mathbf{p}'(\varphi \text{ 給定 } \phi) && \text{(P5)} \\
 &= \mathbf{p}'(\varphi/\phi) && \text{(G)} \\
 &= \mathbf{p}'(\phi \ \& \ \varphi)/\mathbf{p}'(\phi) && \text{(G)} \\
 &= \mathbf{p}(\phi \ \& \ \varphi/\tau)/\mathbf{p}(\phi/\tau) && \text{(P5)} \\
 &= \mathbf{p}((\phi \ \& \ \varphi) \ \& \ \tau)/\mathbf{p}(\tau) \times \mathbf{p}(\tau)/\mathbf{p}(\phi \ \& \ \tau) && \text{(G)} \\
 &= \mathbf{p}((\phi \ \& \ \tau) \ \& \ \varphi)/\mathbf{p}(\phi \ \& \ \tau) && \text{計算} \\
 &= \mathbf{p}(\varphi/\phi \ \& \ \tau) && \text{(G)}
 \end{aligned}$$

依照類似的步驟，我們可以推導出 $\mathbf{p}(\varphi \text{ 給定 } \phi) = \mathbf{p}(\varphi)$ 。

第四部分：* + 古典機率理論

$$\begin{aligned}
 \text{(P6'')} \quad \mathbf{p}(\phi * \varphi/\tau) &= \mathbf{p}(\varphi/\phi \ \& \ \tau) \\
 \text{證明：} \quad \mathbf{p}(\phi * \varphi/\tau) & \\
 &= \mathbf{p}'(\phi * \varphi) && \text{(P5)} \\
 &= \mathbf{p}'(\varphi/\phi) && \text{(G')} \\
 &= \mathbf{p}'(\phi \ \& \ \varphi)/\mathbf{p}'(\phi) && \text{(G')} \\
 &= \mathbf{p}(\phi \ \& \ \varphi/\tau)/\mathbf{p}(\phi/\tau) && \text{(P5)} \\
 &= \mathbf{p}((\phi \ \& \ \varphi) \ \& \ \tau)/\mathbf{p}(\tau) \times \mathbf{p}(\tau)/\mathbf{p}(\phi \ \& \ \tau) && \text{(G')} \\
 &= \mathbf{p}((\phi \ \& \ \tau) \ \& \ \varphi)/\mathbf{p}(\phi \ \& \ \tau) && \text{計算} \\
 &= \mathbf{p}(\varphi/\phi \ \& \ \tau) && \text{(S)}
 \end{aligned}$$

依照類似的步驟，我們可以推導出 $\mathbf{p}(\phi * \varphi) = \mathbf{p}(\varphi)$ 。

第五部分：必輸賭注契約論證的證明

參考文獻

1. Adams, E. W. (1965). "On the Logic of Conditionals." *Inquiry*, 8: 166-97.
2. Adams, E. W. (1975). *The Logic of Conditionals*. Dordrecht: Reidel.

3. Bennett, Jonathan (2003). *A Philosophical Guide to Conditionals*. Oxford: Clarendon Press.
4. Carlstrom, Ian F. and Christopher Hill (1978). "Review of Adams's *The Logic of Conditionals*." *Philosophy of Science*, 45: 155-8.
5. Causey, Robert L. (2006). *Logic, Sets, and Recursion*. 2nd edition. Jones and Bartlett Publishers.
6. Edgington, Dorothy (1995). "On Conditionals." *Mind*, 104: 235-329.
7. Edgington, Dorothy (2006). "Conditionals." In Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2006 Edition),
URL: <http://plato.stanford.edu/archives/entries/conditionals/>
8. Eells, Ellery and Brian Skyrms (eds.) (1994). *Probability and Conditionals: Belief Revision and Rational Decision*. Cambridge University Press.
9. Jackson, Frank (1979/1991). "On Assertion and Indicative Conditionals." *Philosophical Review*, 88: 565-589.
10. Grice, H. P. (1967a). "Logic and Conversation." In his 1989: 22-40.
11. Grice, H. P. (1967b). "Indicative Conditionals." In his 1989: 58-87.
12. Grice, H. P. (1989). *Studies in the Way of Words*. Cambridge MA: Harvard University Press.
13. Hacking, Ian (2001). *An Introduction to Probability and Inductive Logic*. Cambridge University Press.
14. Hájek, Alan (1994). "Triviality on the Cheap?" In Eells and Skyrms (eds.) 1994: 113-140.
15. Hájek, Alan (2005). "Scotching Dutch Book?" *Philosophical Perspectives*, 19: 139-151.
16. Hájek, Alan (2010). "Triviality Pursuit" (未出版)。
17. Harper, William L., Robert Stalnaker, and Pearce, Glenn (eds.) (1981). *Ifs*. Dordrecht: Reidel.
18. Jackson, Frank (1987). *Conditionals*. Oxford: Basil Blackwell.
19. Lewis, David (1973). *Counterfactuals*. Oxford: Basil Blackwell.
20. Lewis, David (1976). "Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities." *Philosophical Review*, 85: 297-315.
21. Lewis, David (1986). "Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities II." *Philosophical Review*, 95: 581-9.
22. Priest, Graham (2001). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press.
23. Priest, Graham (2006). *In Contradiction*. Oxford University Press.
24. Ramsey, Frank (1926). "Truth and Probability." In *Foundations of Mathematics and Other Essays*, R. B. Braithwaite (ed.), Routledge & P. Kegan, (1931): 156-198.

25. Read, Stephen (1995). *Thinking about Logic: An Introduction to the Philosophy of Logic*. Oxford University Press.
26. Skyrms, Brian (1986). *Choice and Chance: An Introduction to Inductive Logic*. 3rd Edition. Wadsworth Publishing Company.
27. Stalnaker, R. (1968). "A Theory of Conditionals." *Studies in Logical Theory, American Philosophical Quarterly Monograph Series*, 2: 98-112. Oxford: Blackwell.
28. Stalnaker, R. (1970). "Probability and Conditionals." *Philosophy of Science*, 37: 64-80.
29. Stalnaker, R. (1975). "Indicative Conditionals." *Philosophia* 5: 269-86.